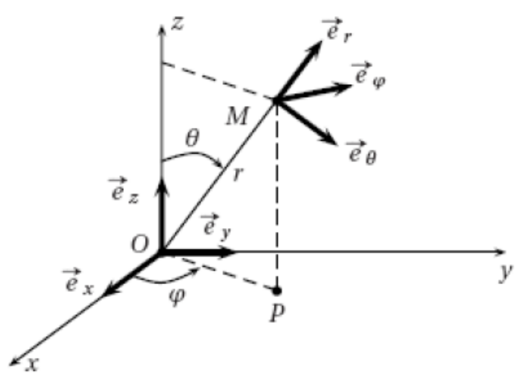
INSA de TOULOUSE - DEPARTEMENT DE STPI 1ère ANNEE
CONTROLE CONTINU ELECTROSTATIQUE
Durée 1 heure

Définition des compétences évaluées :
C1 : Formaliser et mettre en équations (compétence générale du grand domaine SPCI)
C2 : Calculer (compétence générale du grand domaine SPCI)
C3 : Les opérateurs de la théorie des champs (Micro-compétence spécifique à l'électrostatique et propre à la matière : phénomènes électriques)

Chaque question des exercices est attribuée à une compétence et le barème est indiqué.
C1 est évaluée sur 10 points.
C2 est évaluée sur 10 points.
C3 est évaluée sur 10 points.

Coordonnées sphériques



$U = U(r,\theta,\varphi)$;
$\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi.$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \frac{dU}{dr}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{dU}{d\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dU}{d\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{d^2(rU)}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dU}{d\theta}\right)\ldots + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2U}{d\varphi^2}$$

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2A_r)}{dr} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d(\sin\theta A_\theta)}{d\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{dA_\varphi}{d\varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{d(\sin\theta A_\varphi)}{d\theta} - \frac{dA_\theta}{d\varphi}\right)\vec{e}_r\ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{dA_r}{d\varphi} - \frac{d(rA_\varphi)}{dr}\right)\vec{e}_\theta\ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{d(rA_\theta)}{dr} - \frac{dA_r}{d\theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

Dans un repère d'origine O, le vecteur position est défini par : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.
Nous considérons dans la suite de l'exercice le champ vectoriel:

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}$$

où r est le module du vecteur position.

1°) Ecrire les composantes du champ $\vec{a}$ dans le système de coordonnées cartésiennes. ***(C1, 4 points)***

2°) Soit f(x,y,z) le champ scalaire défini par $f(x,y,z) = div\,\vec{a}$. Calculer f(x,y,z) en coordonnées cartésiennes en manipulant l'opérateur Nabla $\vec{\nabla}$. Détailler le calcul. ***(C3, 3 points)***

3°) En déduire l'expression du champ scalaire f(x,y,z) en coordonnées sphériques f(r,θ,φ). ***(C3,1 point)***

4°) Ecrire les composantes du champ $\vec{a}$ dans le système de coordonnées sphériques. ***(C1, 4 points)***

5°) Calculer f(r,θ,φ) en utilisant directement l'expression de la divergence dans le système de coordonnées sphériques. Détailler le calcul. ***(C2, 1 point)***

Nous désirons calculer le flux Φ du champ vectoriel $\vec{a}$ à travers une surface fermée S, définie par une sphère de centre O et de rayon R. Nous utiliserons pour cela le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\boldsymbol{\Phi = \iint_S \vec{a}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\,\vec{a}\,dV}$$

où V est le volume interne de la surface fermée considérée.

6°) Exprimer tout d'abord l'élément de volume dV en coordonnées sphériques. ***(C1, 2 points)***

7°) Calculer $\Phi = \iiint_V div\,\vec{a}\,dV$ en coordonnées sphériques. ***(C2, 3 points)***

8°) Comparer Φ à la surface de la sphère de rayon R ($4\pi R^2$) et donner une explication au résultat que vous obtenez. ***(C2, 1 point)***

Soient A et B deux points quelconques de l'espace alignés avec le point O. On appelle r_A et r_B les distances OA et OB. Nous désirons calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{a}$ le long du segment de droite AB par deux méthodes différentes.

9°) Calculer en coordonnées sphériques la circulation du champ vectoriel $\vec{a}$ le long du segment de droite AB en fonction de r_A et r_B à partir de l'intégration des circulations élémentaires. Détailler le calcul. ***(C2, 3 points)***

10°) Calculer le rotationnel du champ vectoriel $\vec{a}$ dans le système de coordonnées sphériques à partir de l'expression de cet opérateur dans ce système qui est rappelée au début du problème. Détailler le calcul ***(C3, 3 points)***

11°) Si cela vous paraît possible, déterminer l'expression du champ scalaire g(r,θ,φ) défini par : $\vec{a} = \overrightarrow{grad}\,g$. Vous pouvez effectuer ce calcul dans le système de coordonnées qui vous paraît le mieux adapté. ***(C2, 2 points)***

12°) Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{a}$ le long du segment de droite AB en fonction de r_A et r_B en utilisant la propriété du gradient. Vérifiez que l'expression obtenue est similaire à celle obtenue au 9°). ***(C3, 3 points)***